Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

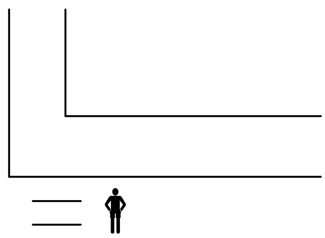
кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. Преобразования

1. Будем говорить, что число n является (a, b)-квадратом, где a и b – целые числа, если найдутся такие целые числа x и y, что $n = ax^2 + by^2$. Пусть число n является (1, 1)-квадратом.
   а) Докажите, что $2n$ и n^2 также является (1, 1)-квадратом.
   б) Докажите, что $3n$ и n^3 также является (1, 1)-квадратом.
   в) Найдите все натуральные числа k, при которых числа kn и n^k будут являться (1, 1)-квадратами.
   г) Проверьте, является ли произведение двух (1, 5)-квадратов опять (1, 5)-квадратом.
   д) Попробуйте найти все целые a и b, для которых произведение двух (a, b)-квадратов опять является (a, b)-квадратом.
2. Число, представимое в виде суммы t квадратов целых чисел будем называть t-квадратом. Пусть число $n^2 = a + b$, где n, a, b – целые числа.
   а) Докажите, что $2(a^3 + b^3)$ является 3-квадратом.
   б) Проверьте, является ли 4-квадратом число $4(a^5 + b^5)$.
   в) Найдите все натуральные числа r, k и t, при которых числа $r(a^k + b^k)$ будут t-квадратами. (Интерес представляют и отдельные серии решений, например, когда одно из чисел r, k или t зафиксировано).
3. Доказать, что для любого целого n число $3n^4 + 1$ является 3-квадратом.
4. Предложите свои обобщения задачи. Например, попробуйте ответить на вопрос, при каких натуральных числах k и tr число $rn^k + 1$ будет являться t-квадратом для некоторого целого числа t, а при каких нет.

2. Переправа

1) Школьнику нужно переправиться через канал, изгибающийся под прямым углом, на противоположный берег. У него имеется две легкие, узкие (будем считать ширину равной нулю) и прочные (не прогибаются) доски длиной 3 метра каждая. Сможет ли он переправиться, если ширина канала 3,2 метра?



2) Решить эту же задачу, при условии, то ширина канала 3,5 метра.

3) Условие тоже, но ширина канала a метров и длина досок l метров. Найти наибольшее значение l, при котором школьник не сможет переправиться на другой берег.

4) Решить пункт 3, если $a = 3{,}5$, но запас покрытия для каждой доски составляет 20 см (по 10 см для каждого конца).

5) Вывести условие возможности переправы через канал ширины a с помощью двух досок различной длины: m и n ($m < a$, $n < a$). В частности, выяснить, возможна ли переправа, если $a = 3{,}5$ м и $m + n = 6$ м.

6) Обобщите задачу на случай трех досок.

7) Рассмотрите случай, если ветви канала имеют разную ширину.

8) Предложите свои обобщения задачи, например, попробуйте найти аналог этой задачи в трехмерном пространстве.

3. Оригами

1. Дан квадратный лист бумаги со стороной 1. Лист можно сгибать, в том числе, по любому отрезку с концами на краях бумаги и разгибать обратно; после разгибания на бумаге остается след от линии сгиба. Отметьте на стороне квадрата точку, делящую сторону квадрата в отношении: а) 3/8, б) $\mathrm{m}/2^{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{m} < 2^{\mathrm{n}}, \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$, в) 5/6, г) m/n, $(\mathrm{m} < \mathrm{n}, \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$, д) $1/\sqrt{2}$, е) $1/\sqrt{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, n не является точным квадратом), ё) $1/\sqrt[3]{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, n не является точным кубом).
2. Для каких иррациональных чисел $\mathrm{r} > 1$, можно разделить сторону в отношении $1/\mathrm{r}$?
3. Какое наименьшее количество сгибаний листа нужно совершить, чтобы получить точку из пункта 1?
4. Какое наименьшее количество сгибаний листа нужно совершить, чтобы получить отрезок длины а) 3/8, б) $\mathrm{m}/2^{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{m} < 2^{\mathrm{n}}, \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$, в) 5/6, г) m/n, $(\mathrm{m} < \mathrm{n}, \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$, д) $1/\sqrt{2}$, е) $1/\sqrt{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, n не является точным квадратом), ё) $1/\sqrt[3]{\mathrm{n}}$, $(\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, n не является точным кубом).
5. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

4. Перестановки

Натуральные числа от 1 до n записанные не в возрастающем порядке будем называть перестановкой τ. Например, числа 1, 3, 2 — перестановка чисел 1, 2, 3. $\tau(i)$ — число стоящее в перестановке на i-том месте, так, в нашем примере, $\tau(2) = 3$.

1.1) Есть набор a из n элементов двух типов, причем известно количество элементов каждого типа. Найдите две различные перестановки τ_1 и τ_2, чтобы количество равенств $\mathrm{a}(\tau_1(i)) = \mathrm{a}(\tau_2(i))$, $1 \le i \le n$ было минимально?

1.2) Обобщите на случай k типов элементов ($k \le n$).

1.3) Пусть $\mathrm{S}(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x \ne y. \end{cases}$ Найдите такие перестановки τ_1 и τ_2, чтобы сумма

$$\mathrm{S}\Big(\mathrm{a}\big(\tau_1(1)\big), \mathrm{a}\big(\tau_2(1)\big)\Big) + \mathrm{S}\Big(\mathrm{a}\big(\tau_1(2)\big), \mathrm{a}\big(\tau_2(2)\big)\Big) + \dots + \mathrm{S}\Big(\mathrm{a}\big(\tau_1(n)\big), \mathrm{a}\big(\tau_2(n)\big)\Big)$$

была как можно ближе к нулю.

1.4) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

2.1) Пусть $\mathrm{a} = (1, 2, \dots, n)$. Найдите такую перестановку τ, чтобы сумма

$$\left|\mathrm{a}\big(\tau(1)\big) - 1\right| + \left|\mathrm{a}\big(\tau(2)\big) - 2\right| + \dots + \left|\mathrm{a}\big(\tau(n)\big) - n\right|$$

была наибольшей.

2.2) Как много существует перестановок τ, чтобы сумма

$$\left|\mathrm{a}\big(\tau(1)\big) - \mathrm{a}\big(\tau(2)\big)\right| + \left|\mathrm{a}\big(\tau(2)\big) - \mathrm{a}\big(\tau(3)\big)\right| + \dots + \left|\mathrm{a}\big(\tau(n-1)\big) - \mathrm{a}\big(\tau(n)\big)\right| + \left|\mathrm{a}\big(\tau(n)\big) - \mathrm{a}\big(\tau(1)\big)\right|,$$

была а) минимальной, б) максимальной?

2.3) Найдите такую перестановку τ, чтобы сумма

$$\left(\mathrm{a}\big(\tau(1)\big) - 1\right)^2 + \left(\mathrm{a}\big(\tau(2)\big) - 2\right)^2 + \dots + \left(\mathrm{a}\big(\tau(n)\big) - n\right)^2$$

была наибольшей.

2.4) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

3.1) Пусть a и b наборы натуральных чисел. Найдите перестановки τ_1 и τ_2 такие, чтобы сумма

$$\mathrm{a}(\tau_1(1))\mathrm{b}(\tau_2(1)) + \mathrm{a}(\tau_1(2))\mathrm{b}(\tau_2(2)) + \cdots + \mathrm{a}(\tau_1(n))\mathrm{b}(\tau_2(n))$$

была а) минимальной, б) максимальной.

3.2) Пусть a, b и c наборы натуральных чисел. Найдите перестановки τ_1, τ_2 и τ_3 такие, чтобы сумма

$$\mathrm{a}(\tau_1(1))\mathrm{b}(\tau_2(1))\mathrm{c}(\tau_3(1)) + \mathrm{a}(\tau_1(2))\mathrm{b}(\tau_2(2))\mathrm{c}(\tau_3(2)) + \cdots + \mathrm{a}(\tau_1(n))\mathrm{b}(\tau_2(n))\mathrm{c}(\tau_3(n))$$

была а) минимальной, б) максимальной.

3.3) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

5. Шашки

На доске размерами $n\times m$ находится одна шашка. Двое игроков поочередно перемещают шашку на одну клетку по вертикали или по горизонтали. После того как шашку убирают с клетки, клетка закрашивается в красный цвет. На клетки красного цвета шашку ставить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Первоначально шашка стоит в угловой клетке. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?
2. Существует ли стратегия обеспечивающая выигрыш одному из игроков не зависимо от первоначального расположения шашки? Если нет, то составьте геометрическое место всех первоначальных позиций шашки, обеспечивающие победу первому игроку при правильной стратегии.
3. Ответьте на те же вопросы, если шашку можно перемещать ещё и по диагонали на одну клетку.
4. Ответьте на те же вопросы, если шашку можно перемещать на не более чем k клеток?
5. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

6. Делимость многочленов

Для многочленов P и Q определим новый многочлен $P\circ Q$ по правилу $P\circ Q(x) = P(Q(x))$.

а) Чему равна степень $P\circ Q$, если степень P равна n, а степень Q равна m?

б) Верно ли, что для любых P и Q справедливо равенство $P\circ Q = Q\circ P$?

в) Докажите, что любого многочлена степени больше первой существует такой многочлен Q степени больше первой, что $P\circ Q = Q\circ P$.

г) Найдите все числа a и b, для которых многочлен $P(ax+b)$ делится на $P(x)$.

д) Пусть P — многочлен не менее первой степени. Докажите, что если $P(0) = 0$, то $P\circ P\circ P$ делится на P. Верно ли обратное утверждение?

е) Найдите все многочлены P ненулевой степени, для которых для любого натурального n $\underbrace{P\circ P\circ \ldots \circ P}_{n}$ делится на P.

ж) Для каждой пары натуральных чисел n и m, где $n > m$, найдите все многочлены $P(x) = ax + b$ первой степени, для которых $\underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{n}$ делится на $\underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{m}$.

з) Для каждого многочлена P степени выше первой найдите хотя бы один многочлен Q степени выше первой, для которого $Q\circ P$ делится на Q.

и) Для каждой пары натуральных чисел n и m, где $n > m$, найдите все многочлены P, для которых $\underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{n}$ делится на $\underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{m}$.

к) Найдите все многочлены P, для которых $\underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{2012} \vdots \underbrace{P\circ \ldots \circ P}_{2000}$.

7. Волшебное ведро

Имеется волшебное m-литровое ведро, в котором изначально находится c литров жидкости ($c\in\mathbb{N}$). Если дотронуться до ведра, то количество жидкости изменится по следующему правилу: если в ведре было a литров, то количество жидкости станет равным остатку от деления ac на m.

1. Пусть $m = 11$. Какое наименьшее число касаний нужно сделать, чтобы в ведре оказался 1 литр жидкости?
2. Пусть $k(c)$ — наименьшее число касаний (см. пункт 1), если первоначальный объем жидкости равен c. Докажите, что $\max_{1 \le c \le 10} k(c)$ делится на $k(c)$, если c изменяется от 1 до 10. Какое наименьшее число касаний нужно сделать, чтобы в ведре оказался 1 литр жидкости, независимо от значения c?
3. Как изменится решение задачи, если вместимость ведра — 12 литров?
4. Ответьте на тот же вопрос, если ведро вместимостью а) 2011 литров, б) 2012 литров, в) p литров, если p — простое, г) p литров, если p — составное.
5. Ответьте на те же вопросы, если при касании количество жидкости изменяется по правилу: а) если в ведре было a литров, то количество жидкости станет равным остатку от деления a^2 на m; б) если в ведре было a литров, то количество жидкости станет равным остатку от деления a^p на m ($p \in \mathbb{N}$).

Предложите свои обобщения и исследуйте их.

8. Восстановление данных

Некто задумал N чисел, после чего написал на $N(N-1)/2$ карточках их попарные суммы и перетасовал получившуюся колоду. Можно ли по этому набору карточек однозначно восстановить исходный набор чисел?

1) Решите задачу, для $N = 3, 4$.

2) Выясните при каких значениях N по полученному набору карточек однозначно можно восстановить набор чисел, а при каких — нет.

3) Можно ли восстановить исходный набор чисел по набору C_n^3 всех сумм по три числа?

4) Можно ли восстановить исходный набор чисел по набору C_n^k всех сумм по k чисел?

5) Можно ли в пунктах 1)–4) обойтись меньшим количеством карточек, чем $N(N-1)/2$? Можно ли обойтись меньшим количеством карточек, если мы знаем дополнительную информацию: а) все N чисел различны, б) все числа принадлежат определенному промежутку?

6) Ответьте на вопросы 1)–5), если вместо суммы на карточках записано попарное произведение.

7) Дана функция $\mathrm{ksyshksy}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Некто на карточках записывает значения функции, используя пары задуманных чисел в качестве аргументов функции ksyshksy. Ответьте на вопросы 1)–5) если а) пары чисел используются неупорядоченные и $\mathrm{ksyshksy}\,(a,b) = a^2 + b^2$, б) пары чисел используются упорядоченные и $\mathrm{ksyshksy}\,(a,b) = 2a + b$. Для каких N задача разрешима, если используются неупорядоченные пары и ksyshksy — симметрический многочлен степени m? Для каких функций ksyshksy задача разрешима, если $\mathrm{ksyshksy}\,(a,b) \ne \mathrm{ksyshksy}(\mathrm{b},\mathrm{a})$?

Задачи предложили:
задача №6 — Миротин А.Р., задачи №№1, 2 — Симоненко Д.Н., задачи №№1, 7, 8 — Мурашко В.И., задачи №№3, 4, 8 — Горский С.М., задача №5 — Голуб П.А., задача №4 — Короткевич Г. В.